Cadre : $\mathbb{K}$ est le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^\star$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme d'algèbre $\|.\|$.

I Définitions et premières propriétés

1) Définition

Proposition 1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 2. On définit l'application exponentielle comme suit :

$$\exp : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array} \right.$$

Corollaire 3. $\exp$ *est une application continue.*

Exemple 4. *(i)* $\exp(O_n) = I_n$ *et* $\exp(I_n) = eI_n$

(ii) $\exp\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

(iii) Si N est nilpotente d'indice k, $\exp(N) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{N^i}{i!}$.

2) Propriétés de l'exponentielle de matrices

Proposition 5. *(i)* $AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$

(ii) $\forall P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}$

(iii) $\exp({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}\exp(A)$ *et* $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$

Contre-exemple 6. *Si* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *alors on a* $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix}$ *différent de* $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 7. *(i) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors* $\exp(A) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.

(ii) $\exp(A)$ *est un polynôme en A.*

Proposition 8. $Sp(\exp(A)) = \exp(Sp(A))$

Corollaire 9. $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$

Corollaire 10. *Si N est nilpotente, alors* $\exp(N) - I_n$ *est nilpotente.*

Proposition 11. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, si $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont ses valeurs propres distinctes, et si $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifie $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, alors* $\exp(A) = P(A)$.

3) Méthode de calcul

Exemple 12. *Si* $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $\exp(A_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Définition 13. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition de Dunford s'il existe D diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et N nilpotente telles que $DN = ND$ et $A = D + N$.

Théorème 14. *Si le polynôme caractéristique de A est scindé, alors A admet une unique décomposition de Dunford sur $\mathbb{K}$.*

Remarque 15. *En particulier, c'est le cas pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Proposition 16. *Soit A de décomposition de Dunford $A = D+N$, alors :*

$$\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = \exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$$

Corollaire 17. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable si, et seulement si,* $\exp(A)$ *l'est.*

Exemple 18. *Calcul d'un bloc de Jordan de taille k :*

$$\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = e^\lambda \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Corollaire 19. *Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut calculer* $\exp(A)$ *à l'aide d'une décomposition de Jordan.*

II Étude de l'application exponentielle

1) Injectivité et surjectivité

Proposition 20. exp *n'est pas injective.*

Exemple 21. $\exp\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = \exp(0) = I_2$

Lemme 22. *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$.

Théorème 23. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$

Théorème 24. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \left\{A^2 \,\middle|\, A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$

Application 25. *(i)* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

(ii) Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, *alors il existe* $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ *telle que* $A = B^p$.

2) Régularité

Proposition 26. *L'application* $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *est* $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 27. *La différentielle de* exp *en 0 est l'identité.*

Définition 28. Comme $d_0 \exp = Id$, exp est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local sur un voisinage de 0. Plus précisément, on peut définir son inverse sur la boule ouverte centrée en I_n de rayon 1. Si $||H|| < 1$, on pose :

$$\exp^{-1}(I_n + H) = \log(I_n + H) = -\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-H)^k}{k}$$

Proposition 29. *Pour* $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a :*

$$d_X \exp(H) = e^X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ad\,X)^k}{(k+1)!} H \quad \text{où} \quad ad\,X(H) = XH - HX$$

Corollaire 30. *Si* $X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *commutent,* $d_X \exp(H) = e^X H$.

Proposition 31. $t \mapsto \exp(tA)$ *est dérivable de dérivée* $t \mapsto A\exp(tA)$.

III Applications

1) Équations différentielles linéaires

Définition 32. Un système différentiel linéaire du premier ordre dans $\mathbb{K}^n$ est une équation de la forme $Y' = AY + B$, où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ sont continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 33. *Par tout point* $(t_0, V_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ *il passe une solution maximale unique, définie sur* I *tout entier.*

Proposition 34. *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *la solution du problème de Cauchy* $Y'(t) = A \cdot Y(t)$ *et* $Y(t_0) = V_0$ *est donnée par :*

$$Y(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot V_0$$

Proposition 35. *Pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $B : I \to \mathbb{K}^n$, *la solution du problème de Cauchy* $Y'(t) = A \cdot Y(t) + B(t)$ *et* $Y(t_0) = V_0$ *est donnée par :*

$$Y(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot V_0 + \int_{t_0}^{t} \exp((t-u)A)B(u)du$$

2) Exponentielle de matrices et topologie

Théorème 36 (Décompostion polaire)**.** $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Théorème 37. $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Corollaire 38. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Développements

- Décomposition de Dunford (14) [Gou]
- Surjectivité de l'exponentielle de matrice (22,23,24) [Zav]
- Un homéomorphisme induit par l'exponentielle (37,38) [CG]

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre*. Ellipses, 2e edition
[Rou] François Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel*. Cassini
[Zav] Maxime Zavidovique. *Un Max de Math*. Calvage et Mounet
[Dem] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences
[CG] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1*. Calvage et Mounet